

RENDICONTI  
DELLE SEDUTE  
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 febbraio 1922.

R. LANCIANI, Socio anziano, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Sull'assorbimento della gravitazione.* Nota VII del Corrisp. QUIRINO MAJORANA.

RISULTATI DELLE OSSERVAZIONI. — Come ho già accennato nelle Note precedenti, le osservazioni sono state fatte nei due casi *tara-contrappeso* e *sfera-contrappeso*, ed in ciascuno di questi, alternando le letture con i piombi in PP oppure in P'P'. Esse si sono svolte fra il 16 maggio ed il 2 luglio 1921, e costituiscono 11 serie per il primo caso e 10 per il secondo, le quali si sono alternate in quel periodo di tempo. Ciascuna serie è costituita da un certo numero di determinazioni (variabile a seconda delle circostanze fra 10 e 30) della posizione di equilibrio della bilancia, dedotta leggendo tre elongazioni successive del raggio luminoso riflesso dal giogo. Contemporaneamente si è avuta cura di mantenere, in ogni serie, l'indice luminoso riflesso dal controllo sempre sullo stesso punto della scala verticale, mediante la regolazione della corrente dell'elettromagnete J: ciò, come si è spiegato, la bilancia veniva riportata sempre nella stessa posizione angolare, eliminandosi l'errore proveniente dalle deformazioni dell'edificio.

Il metodo adottato ha dunque permesso di determinare l'influenza della presenza dei piombi intorno alla sfera, in maniera del tutto analoga a quella già spiegata nelle prime ricerche<sup>(1)</sup> per il caso del mercurio. Ma in queste

(1) Vedi questi Rendiconti, vol. XXIX, pag. 90 e 91.

nuove esperienze l'influenza in parola è stata rilevata tanto nel caso *tara-contrappeso* che nell'altro *sfera-contrappeso*, per le ragioni viste a suo tempo. Poichè al principio ed alla fine di ogni serie (la cui durata si aggirava intorno alle due ore) veniva determinata la sensibilità della bilancia mediante il congegno A<sub>1</sub>A<sub>2</sub>A<sub>3</sub>, si è potuto ogni volta trasformare i mm. di spostamento del raggio luminoso sulla scala, in mg.

Qui appresso, riporto, a mo' di esempio, le prime due serie di determinazioni fatte per i due casi *tara-contrappeso* e *sfera-contrappeso*; ciascuno dei numeri, espresso in mm., è stato ottenuto dopo aver letto tre oscillazioni della bilancia *senza piombi*, tre *con piombi* e infine altre tre *senza piombi*:

*tara contrappeso*; sensibilità media 249 mm/mg.;

*l'indice luminoso si sposta verso il basso per la presenza dei piombi, di:*  
mm.: 0,18, 0,50, 0,31, 0,35, 0,23, 0,23, 0,02, 0,16, 0,19, 0,90, 0,28, 0,43,  
0,15, 0,77, 0,36 (15 osservazioni);

media: mm. 0,338, pari a mg. 0,338/249 = mg. 0,00136;

*sfera-contrappeso*: sensibilità media 242 mm./mg.;

*l'indice luminoso si sposta verso il basso c. s., di:*  
mm.: 0,46, 0,34, 0,26, 0,29, 0,23, 0,12, 0,03, 0,19, 0,38, 0,35, 0,22, 0,16,  
0,23 (13 osservazioni);

media: mm. 0,251, pari a mg. 0,251/242 = mg. 0,00104.

Ed in maniera simile ho proceduto per le altre serie. Tutte le medie sono qui sotto riportate, espresse in mg.:

| <i>tara-contrappeso</i><br>(errore magnetico) | <i>sfera-contrappeso</i><br>(assorbimento gravit. lordo) |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 0,00136                                       | 0,00104                                                  |
| 0,00211                                       | 0,00022                                                  |
| 097                                           | 142                                                      |
| 085                                           | 161                                                      |
| 108                                           | 135                                                      |
| 207                                           | 162                                                      |
| 170                                           | 064                                                      |
|                                               | 065                                                      |

Per quanto si è detto, i precedenti numeri rappresentano in complesso le medie di 176 determinazioni di posizioni di riposo della bilancia, e di un numero all'incirca quadruplo di letture di oscillazioni, oltre quelle necessarie per le osservazioni della variabile sensibilità della bilancia.

L'esame del precedente specchietto ci dice che la posizione di riposo del giogo della bilancia *si abbassa* sempre alquanto, per la presenza dei piombi intorno alla sfera, cioè tanto che si sperimenti con *tara-contrappeso*, che con *sfera-contrappeso*. E si può a prima vista credere che realmente

non vi sia alcuna influenza vera dovuta alla presenza dei piombi intorno alla sfera, giacchè i 21 numeri su riportati appariscono poco differenti, oscillando essi tra 1 e 2 millesimi di milligrammo, all'incirca. Potrebbe nascere quindi il dubbio che se realmente il muovere i piombi, portandoli da PP a P'P', dà luogo ad uno spostamento della posizione di riposo di tale ordine di grandezza, ciò avvenga indifferentemente alla stessa guisa per i due modi di caricare il giogo e che quindi nessun assorbimento gravitazionale esista; o che, per lo meno, questo fenomeno non sia rivelabile col congegno da me ora sperimentato, perchè troppo delicato, o perchè mascherato da una causa che, pur lasciando accusare alta bilancia i 2 millesimi di mg. predetti, non consente ad essa di indicare valori alquanto più grandi o più piccoli. Un tale fatto potrebbe verificarsi p. e. se il giogo nel muoversi, incontrasse qualche ostacolo dovuto ad attrito nei coltelli o ad altra imperfezione.

Preoccupato da tale considerazione, ho istituito una doppia serie di veritiche o controlli, tendenti ad allontanare quel dubbio. Da un canto ho avuto frequentemente cura di determinare lo smorzamento delle oscillazioni della bilancia: risultava così costantemente il rapporto tra due elongazioni consecutive e dallo stesso lato, di 0,9 circa: ritengo che sarebbe stato difficile od impossibile accrescere notevolmente tale rapporto nella speciale mia disposizione, rappresentando quella cifra il limite imposto dalla lavorazione anche la più accurata dei coltelli. L'osservazione saltuaria dello smorzamento mi ha permesso talvolta di accorgermi e di eliminare prontamente qualche causa perturbatrice insospettata, come il depositarsi di un velo sottilissimo di resina su tutto il giogo, dovuto alla condensazione di vapori emessi sotto l'azione del calore e del vuoto, dal mastice adoperato per chiudere la bilancia. La costanza dello smorzamento, constatata nel passare da ampie a piccole oscillazioni, mi ha fatto poi escludere l'esistenza di anormali condizioni del sistema oscillante.

Ma d'altro canto, ho istituito una veritica più diretta della giustezza di tale conclusione. Senza muovere i piombi, ho accresciuto lo sforzo esercitantesi sul braccio destro del giogo (quello cioè che sostiene la sfera), di qualche millesimo di mg.: e cioè da 1 a 5, in più esperienze successive. Questo scopo è stato da me raggiunto ponendo a varie distanze al disotto della custodia della sfera, un disco circolare di piombo di circa 15 kg., e calcolando a priori, per la conoscenza delle sue dimensioni e della sua distanza dal centro della sfera, la forza newtoniana così occasionata. Si comprende ora che con tal modo di procedere, non si generi alcuna deformazione perturbatrice sul sostegno della bilancia, e che è quindi inutile in tal caso servirsi del controllo a mercurio, o dell'esperienza *in bianco, tara-contrappeso*. Ebbene, facendo le medie di parecchie osservazioni, che qui non riporto, così eseguite, ho constatato che realmente le inclinazioni del giogo, caso per caso,

seguono esattamente i valori dello sforzo aggiunto, variabile come si è detto da 1 a 5 millesimi di milligrammo. Ciò vuol dire che il giogo è perfettamente sensibile a tali delicatissimi sovraccarichi.

Ritornando ora all'esame della tabella numerica precedente, rimane a interpretare il fatto per cui le cifre *sfera-contrappeso* e *sfera-contrappeso* non sieno troppo differenti, pur ammettendo l'esistenza dell'assorbimento gravitazionale; ed è facile vedere come ciò sia possibile tenendo conto delle cause newtoniane di errore discussi nella Nota precedente. Anzitutto per quanto riguarda l'*errore magnetico*, esso può essere indicato con maggior precisione dalla media delle 11 osservazioni su riportate:

$$E = - mg. 0,00147 \pm 0,00009,$$

e si è adottato il segno — perchè esso concorrerebbe a nascondere l'effetto di assorbimento gravitazionale, dapochè il giogo si abbassa per sua causa dal lato della sfera, contrariamente a quanto avverrebbe per quello, se fosse puro. Effettivamente per l'effetto di assorbimento lordo si hanno, come si è riportato nella tabella, delle cifre che debbono restar positive, perchè il giogo si sposta ancora dalla stessa parte e basterà sommare algebricamente ciascuna di queste con l'errore magnetico e con le altre correzioni newtoniane già studiate, per aver finalmente l'effetto corretto.

Considero, p. e., la prima determinazione dell'assorbimento gravitazionale od effetto lordo su riportata, cioè + mg. 0,00104. Ad essa vanno fatte le seguenti correzioni:

|                                               |               |
|-----------------------------------------------|---------------|
| Assorbimento gravit. lordo . . . . .          | + mg. 0,00104 |
| Errore magnetico medio . . . . .              | — " 0,00147   |
| Attrazione zattera . . . . .                  | — " 0,00231   |
| Attrazione masse suss <sup>ic</sup> . . . . . | — " 0,00180   |
| Attrazione su contrappeso . . . . .           | + " 0,00275   |
| Totale: assorb. gravit. corretto . . . . .    |               |
|                                               | — mg. 0,00179 |

Le elencate correzioni si fanno analogamente, per tutte le altre 9 serie del caso *sfera-contrappeso*; in complesso abbiamo dunque le 10 osservazioni corrette seguenti, per l'*assorbimento gravitazionale subito dalla sfera di gr. 1274 perchè circondata dai 9616 Kg. di piombo*:

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| mg. : — 0,00179 | — 0,00261 |
| — 0,00141       | — 0,00221 |
| — 0,00165       | — 0,00206 |
| — 0,00153       | — 0,00242 |
| — 0,00219       | — 0,00218 |

E la media di esse è

$$— mg. 0,00201 \pm 0,00010,$$

cioè la sfera di piombo apparecchia alleggerita di circa 2/1000 di mg..

DISCUSSIONE DEL RISULTATO. — Lo smorzamento gravitazionale constatato è dunque circa la metà di quello presunto in base alle prime esperienze. Il disaccordo può dipendere o da imperfezione della mia teoria, la quale sarebbe così valevole in prima approssimazione soltanto, oppure da errori in una od in entrambe le due serie di misure. Debbo ritenere più probabile l'esistenza di qualche errore nella prima serie (quella col mercurio); ma d'altro canto è da tener presente che le difficoltà incontrate, e che ho cercato di superare, nel servirmi della massa schermante di piombo di 10 tonnellate circa, hanno dato alla seconda serie di misure un grado di incertezza relativa, alquanto superiore.

Peraltro, l'importanza dell'argomento è tale, che è da augurarsi la ripetizione delle mie esperienze per opera di altri fisici; con ciò solo, si potrà acquistare la assoluta certezza, se non del valore numerico, almeno della esistenza generica dell'assorbimento gravitazionale.

Comunque, in base al constatato affievolimento del peso della sfera, si può cercare di calcolare quale sia il valore della costante  $h$ , secondo le ipotesi a suo tempo avanzate. All'uopo, analogamente a quanto già dissisi nelle prime ricerche col mercurio<sup>(1)</sup> occorrerebbe trovare lo spessore medio del mantello di piombo che, circondando la sfera, ne occasiona la diminuzione di peso. Il calcolo rigoroso sarebbe assai difficile tenuto conto che la massa schermante è cubica anzichè sferica; anzi sotto certi riguardi si può ritenere indeterminato, giacchè non si conosce la distribuzione delle masse che costituiscono il globo terrestre. Se le più pesanti fossero localizzate in prossimità del centro di tale globo, si comprenderebbe come l'assorbimento verrebbe a manifestarsi principalmente lungo le verticali passanti per i vari punti della sfera; e cioè per un tratto uguale al mezzo lato del cubo, meno il raggio della nicchia N (fig. 2). Ciò equivale a cm. 47,5 — 4,4 = cm. 43,1. Ché se poi la densità della terra fosse uniforme (la qualcosa, come è noto è lontana dal vero) anche dei raggi gravitazionali non verticali verrebbero notevolmente affievoliti, ed essi possono raggiungere una lunghezza massima pari alla mezza diagonale del cubo, diminuita, al solito, del raggio della nicchia, cioè di cm. 77 circa. Ma la semplice considerazione di questo problema geometrico, fa vedere che il caso di raggi talmente lunghi è piuttosto raro di fronte agli infiniti possibili, e che in ogni modo essi, essendo inclinati, danno un contributo piuttosto piccolo alla componente verticale totale che corrisponde al peso della sfera. Per cui, sempre restando dentro i limiti 43 e 77, e nell'impossibilità di stabilire un calcolo rigoroso, ritengo di non esser troppo lontano dal vero ammettendo uno spessore medio del mantello di piombo, di circa 50 cm. Si ha dunque, sapendo che la

<sup>(1)</sup> Vedi questi Rendiconti, vol. XXIX, pag. 236.

densità del piombo è 11,33:

$$h = \frac{0,000002}{1274 \cdot 11,33 \cdot 50} = 2,8 \cdot 10^{-12}.$$

Ricordo, che nelle prime esperienze avevo avuto per  $h$  il valore  $6,7 \cdot 10^{-12}$ ; per cui anche tale valore rimarrebbe ridotto, secondo le nuove esperienze, alla metà circa di quello calcolato altra volta.

POSSIBILITÀ DI ALTRE CAUSE D'ERRORE. — A me sembra di poter escludere l'esistenza di una causa di errore capace di giustificare completamente la diminuzione di peso constatata nella sfera. Ad ogni modo osservo, come altra volta, che la causa di errore a cui si pensa più facilmente in una ricerca del genere, è la eventuale dissimmetria di massa nei piombi, o l'inesatta valutazione delle attrazioni newtoniane parassite di cui ho parlato. Ora, quanto a queste ultime, se si pensa che esse sono precisamente dell'ordine di un paio di millesimi di mg. ciascuna (come si è visto), si comprende che non vi possa essere in taluna di esse qualche errore, che dovrebbe raggiungere il 100% circa. Per quanto riguarda la dissimmetria nei piombi, un calcolo sommario fa vedere che per ottenere uno sforzo sulla sfera di circa 2/1000 di mg., sarebbe occorsa una dissimmetria della sfera, rispetto alle facce del cubo, di uno spessore di piombo di circa 10 mm.; od, in altri termini, che la sfera fosse stata spostata, in tutte le esperienze, rispetto al centro del cubo, ed in basso, di circa la metà di quel valore cioè di circa 5 mm. È poi da osservare che, in considerazione della esistenza della nicchia N (fig. 2), alla eventuale attrazione della sfera verso una delle facce del cubo (dovuta alla suddetta dissimmetria) si contrapporrebbe l'attrazione generata dalla dissimmetria rispetto alla nicchia; e tale attrazione, come è facile rilevare, sarebbe precisamente di segno contrario e di valore assoluto pochissimo differente dalla prima. Per far comprendere ciò supponiamo che invece di un cubo con una cavità sferica al centro, si fosse trattato di una sfera massiccia, con la stessa cavità centrale. È facile vedere, che in tale caso, qualsiasi punto materiale nell'interno della cavità sferica sarebbe in perfetto equilibrio newtoniano. Il fatto di adoperare un cubo anziché una sfera, pur non essendo esattamente equivalente, non può cambiare di molto questa conclusione, e quindi una dissimmetria nella posizione della sfera nell'interno della nicchia non può dare notevole componente verticale attrattiva.

Per togliere infine qualsiasi altro scrupolo circa la esattezza di tale conclusione ricordo il fatto che l'incertezza di aggiustaggio sia della nicchia che della sfera rispetto al cubo, non può in ogni caso superare 0,5 mm. circa.

Mineralogia. — *Ardennite di Ceres, in val d'Ala (Piemonte)*<sup>(1)</sup>. Nota preliminare del Corrisp. FERRUCCIO ZAMBONINI.

Già da qualche tempo, io ho trovato nei dintorni di Ceres, nei filoncelli quarzosi che attraversano gli gneiss minuti ed i micascisti, della piemontite abbondante e bellissima, non inferiore, in certi campioni, per bellezza, a quella classica di St. Marcel, in valle d'Aosta. La piemontite è accompagnata da altri minerali di manganese: rara è, però, la rodonite, parzialmente alterata, della quale non ho rinvenuto che un grosso nodulo. Vari altri minerali si associano alla piemontite, ma non intendo di farne parola ora, ripromettendomi di trattarne presto in una Memoria dedicata all'interessante giacimento.

Desidero, col presente scritto, puramente preliminare, di far conoscere brevemente l'esistenza nel giacimento di Ceres in questione, di un minerale, l'ardennite, non trovato finora in Italia, e del quale, anzi, almeno per quanto io so, non è noto che un solo giacimento, quello di Salm Chateau, presso Ottrez, nelle Ardenne belghe.

L'ardennite si rinviene, nella nuova località, intimamente associata alla piemontite, sotto forma di aggregati fibrosi o bacillari, che possono raggiungere anche 5-6 cm. di lunghezza. Non di rado questi aggregati sono contorti o ripiegati. Alle volte essi sono inquinati soltanto dal quarzo e da minutissimi granuletti o tavolette cristalline di un minerale trigonale, di colore grigio-ferro, con splendore metallico, che è, molto probabilmente, ematite. Frequenti anche sono, però, i casi, nei quali i fascetti di ardennite si mostrano commisti a quelli di piemontite, formando nella quarzite delle strette zonature, alternate, costituite prevalentemente dall'uno o dall'altro dei due minerali, ovvero degli esili straterelli, nei quali piemontite ed ardennite sono confusamente intrecciate e commiste.

Nelle Ardenne, l'ardennite è accompagnata, nelle vene di quarzo attraversanti gli scisti paleozoici di quella formazione, da pirolusite e da albite: l'associazione con la piemontite, osservata nel giacimento di Ceres, rappresenta, perciò, una novità.

L'ardennite di Ceres è di colore bruno di colofonia più o meno cupo, corrispondente a quello di alcune delle varietà delle Ardenne. Non ho, finora almeno, osservato la varietà di colore giallo più o meno volgente all'aran-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Torino.

ciato, che è frequente nelle Ardenne. Lo splendore è vitreo un po' grasso: in alcuni campioni più finamente fibrosi diventa un poco setaceo.

Dato il modo di presentarsi dell'ardennite di Ceres, non ho potuto rinvenire cristalli nitidi, ben conformati. È abbastanza facile trovare dei frammenti, con delle faccie di {010}, di {100} e di {110}. Una sola volta ho osservato un cristallino terminato parzialmente ad un'estremità dell'asse *c*: si tratta di un piccolo cristallino tabulare secondo {010}, che presentava la combinazione {010} {100} {110} {101}. Qua e là nel quarzo ho veduto qualche cristallino distinto, ma sempre con faccie soltanto della zona [001]. Rompendo le masserelle fibrose, si isolano, talvolta, delle laminette appiattite parallelamente a {100}, precisamente come avviene, secondo Lacroix<sup>(1)</sup>, nel minerale tipico delle Ardenne. Non di rado, però, l'appiattimento è solo apparente, e dovuto a combinazione oscillatoria di molti cristalli.

Le poche misure eseguite, puramente approssimative del resto, si accordano bene con i valori calcolati da vom Rath:

|                       |      |        |       |
|-----------------------|------|--------|-------|
| (100):(110) = 25° 17' | mis. | 25° 0' | calc. |
| (110):(110) 129 57    | "    | 130 0  | "     |
| (100):(101) 56 ca     | "    | 56 5   | "     |
| (010):(101) 89 50     | "    | 90 0   | "     |

La sfaldatura è facile secondo {010}: si osserva anche nitida la separazione parallelamente a {001}, già notata nei cristalli delle Ardenne. A causa di questa separazione, i frammenti che si ottengono frantumando le masserelle di ardeunite di Ceres sono spesso limitati da {010} e da {001}, ed allungati secondo l'asse *a*.

Le proprietà ottiche corrispondono a quelle già fatte conoscere per il minerale delle Ardenne da Des Cloizeaux e da Lacroix.

Il piano degli assi ottici è parallelo a {100}: la bisettrice acuta, positiva, è perpendicolare a {010}. La dispersione è forte,  $\epsilon > v$ .

Non ho potuto, finora, preparare una sezione parallela a (010) abbastanza trasparente e, nello stesso tempo, sufficientemente spessa, per misurare esattamente 2E: i valori approssimativi che ho ottenuto fino ad oggi sono assai prossimi a quelli trovati da Des Cloizeaux. Il pleocroismo è forte:  $n_g$  = giallo pallidissimo, alquanto verdastro  $n_m$  e  $n_p$  = giallo d'oro chiaro nelle lamine molto sottili;

$n_g$  = giallo verdastro  $n_m$  e  $n_p$  = bruno rossiccio in quelle più spesse<sup>(2)</sup>.

(1) *Minéralogie de la France et de ses Colonies*, I, 125.

(2) Come ha notato Lacroix nell'ardennite del Belgio, la differenza fra i colori nelle direzioni di  $n_m$  e di  $n_p$  è molto piccola. Nell'ardennite di Ceres è pure tenue, però, nettamente percepibile e, precisamente, l'assorbimento nella direzione di  $n_p$  è un po' più forte che in quella di  $n_m$ .

L'analisi chimica dell'ardennite di Ceres fu eseguita su materiale purificato ripetutamente e con gran cura, mediante lo joduro di metilene. La separazione totale del quarzo riesce, però, difficile, anche operando su polvere sempre più fina. In ogni trattamento, io ho sempre preso soltanto la porzione che precipitava immediatamente, con grande velocità, al fondo del separatore, trascurando quella che si depositava più lentamente. Ad onta di queste cure, l'analisi ha dato un lievissimo eccesso di biossido di silicio, che dipende, molto probabilmente, da quarzo che non si è riusciti a separare perfettamente. È noto che, quando si ha a che fare con inclusioni minutissime, la separazione con i liquidi pesanti non riesce. Così, per esempio, Penfield e Pratt<sup>(1)</sup> non poterono separare completamente il quarzo dalla staurolite.

L'analisi dell'ardennite di Ceres fu eseguita fondendo la polvere del minerale con carbonato e nitrato di sodio.

La massa fusa venne trattata con acqua, e l'estratto acquoso, intensamente verde, decolorato con acqua ossigenata pura. Il residuo insolubile in acqua fu nuovamente fuso con carbonato e nitrato di sodio, in modo da essere certi che l'arsenico ed il vanadio fossero stati completamente asportati.

Dai due estratti acquosi riuniti fu separato il silicio, mediante evaporazione a secco con HCl. Come si verifica di solito nei silicati che contengono meno di 40 % di SiO<sub>2</sub>, la quantità di silicio passata nella soluzione fu scarsa. Eliminato il silicio, si precipitò l'arsenico con idrogeno solforato, e lo si dosò, poi, allo stato di piroarseniato di magnesio. Dopo scacciato l'acido solfidrico, venne precipitato l'alluminio con ammoniaca. La precipitazione fu ripetuta tre volte, perchè, come hanno già notato Bettendorff<sup>(2)</sup> e Prandtl<sup>(3)</sup>, l'idрато di alluminio precipitato è sempre vanadifero. Nell'ossido di alluminio da me ottenuto, mediante l'acqua ossigenata fu possibile svelare ancora la presenza di tracce di vanadio, che furono determinate colorimetricamente. L'ossido di alluminio conteneva anche alquanto fosforo, che fu precipitato allo stato di fosfomolibdato ammonico, usando la soluzione concentrata di molibdato ammonico proposta da Al. Gressly<sup>(4)</sup>. Nel liquido dal quale si era separato l'alluminio, e che fu tirato a secco con acido nitrico, in modo da avere il vanadio certamente sotto forma pentavalente, questo elemento fu dosato colorimetricamente prima, e, poi, col cupferron, seguendo le indicazioni di W. A. Turner<sup>(5)</sup>.

(<sup>1</sup>) Ueber die chemische Zusammensetzung des Stauroliths, ecc. Zeitsch. für Kryst. 1894, XXIII, 64.

(<sup>2</sup>) Ueber den Ardennit und über eine Methode zur Scheidung der Vanadinsäure von Thonerde und Eisenoxyd. Pogg. Ann. 1877, CLX, 126.

(<sup>3</sup>) Ueber den Ardennit. Zeitsch. für Kryst. 1905, XL, 392.

(<sup>4</sup>) Treadwell, kurzes Lehrbuch der analytischen Chemie, II, 202.

(<sup>5</sup>) Amer. Journ. Sc. 1914 [4], XLI, 339.

La parte insolubile in acqua del prodotto della fusione del minerale con carbonato e nitrato sodico fu analizzata con i soliti metodi.

Mi è sorto il dubbio che, nel separare il silicio dall'estratto acquoso acidificato con HCl (metodo usato, fra gli altri, dal Prandtl), si potesse avere una perdita di arsenico. Perciò, ripetuto la determinazione, acidificando a freddo con HCl la soluzione acquosa, il che avvenne senza che si separasse silice, e precipitando senz'altro l'arsenico con l'idrogeno solforato.

Si ottenne, così operando, una quantità di piroarseniato di magnesio un poco superiore a quella ottenuta prima.

L'analisi completa ha dato i seguenti risultati:

|                                |           | Rapp. mol. |       |
|--------------------------------|-----------|------------|-------|
| SiO <sub>2</sub>               | . . . . . | 29,53      | 0,490 |
| As <sub>2</sub> O <sub>5</sub> | . . . . . | 10,30      | 0,045 |
| P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>  | . . . . . | 0,12       | 0,001 |
| V <sub>2</sub> O <sub>5</sub>  | . . . . . | 0,25       | 0,001 |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | . . . . . | 22,40      | 0,219 |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | . . . . . | 3,11       | 0,019 |
| CuO                            | . . . . . | 0,75       | 0,009 |
| CaO                            | . . . . . | 5,61       | 0,101 |
| SrO , BaO (1)                  | . . . . . | tr.        |       |
| MnO                            | . . . . . | 18,76      | 0,264 |
| NiO                            | . . . . . | 0,04       | 0,001 |
| MgO                            | . . . . . | 4,03       | 0,100 |
| Na <sub>2</sub> O              | . . . . . | 0,07       | 0,001 |
| K <sub>2</sub> O               | . . . . . | 0,12       | 0,001 |
| H <sub>2</sub> O —             | . . . . . | 0,12       | —     |
| H <sub>2</sub> O +             | . . . . . | 5,42       | 0,301 |
|                                |           | 100,63     |       |

La composizione chimica dell'ardennite di Ceres corrisponde assai bene alla formula 10 SiO<sub>2</sub> . (As , V , P)<sub>2</sub>O<sub>5</sub> . 5 (Al , Fe)<sub>2</sub>O<sub>3</sub> . 10 (Mn , Mg , Ca , Cu) . 6 H<sub>2</sub>O dell'ardennite tipica, la quale richiede che questi costituenti si trovino nel rapporto di 2:0,20:1:2:1,2.

Come è noto, l'ardennite di Salm Chateaux costituisce una serie pressoché completa di cristalli misti, composti da due termini estremi, uno poverissimo in vanadio, l'altro quasi privo di arsenico, che si possono distin-

(1) Questi elementi furono riconosciuti allo spettroscopio.

guere con i nomi di *arsenioardennite* e di *vanadioardennite*. L'ardennite di Ceres analizzata è un'*arsenioardennite*, ed è, anzi, la varietà più povera in vanadio che sia stata finora analizzata. L'*arsenioardennite* più pura di Salm Chateau è, infatti, quella studiata da Prandtl, la quale contiene, però, 0,81%  $V_2O_5$ .

Nelle ardenniti belghe, Bettendorff ha indicato la presenza di tracce di  $P_2O_5$ , mentre Prandtl non ricorda affatto il fosforo, la cui presenza è assolutamente sicura nell'ardennite di Ceres. Il nichelio e i metalli alcalini non sono stati, finora, determinati nelle ardenniti belghe. Molto notevole è l'elevato tenore in calcio dell'*arsenioardennite* di Ceres. Nelle varietà belghe questo elemento, infatti, è stato trovato in quantità molto minori: soltanto in una delle analisi di Pisani sale a 2,98%<sup>(1)</sup>. Interessante è anche il contenuto in rame della nostra ardennite. Nelle varietà delle Ardenne, il rame talvolta non è indicato affatto o è dato come presente in tracce. Bettendorff, in due analisi, ha trovato 0,22% e 0,17% CuO: nella sua prima analisi inesatta, Pisani dà 1,30% CuO. È probabile che allora il Pisani abbia pesato col rame anche dell'arsenico, tanto più che questo elemento gli era sfuggito. Nell'ardennite di Ceres analizzata, il rame fu dosato nel residuo insolubile in acqua del prodotto della fusione del minerale con carbonato e nitrato sodico, residuo che era assolutamente privo di arsenico. Inoltre, il precipitato ottenuto con l'idrogeno solforato dopo la separazione della silice fu trattato con solfuro sodico, e si constatò poi, l'assenza del piombo o di altri elementi nell'ossido rameico pesato.

Bettendorff aveva osservato, nelle ardenniti da lui studiate, che il colore diventa sempre più chiaro, man mano che aumenta la quantità dell'arsenico. L'*arsenioardennite* di Ceres, al contrario, possiede un colore abbastanza cupo, e deve ritenersi, perciò, che la distinzione dell'arsenio dalla *vanadioardennite* non può farsi in base al colore. Del resto, le osservazioni di Bettendorff non hanno validità generale nemmeno per le ardenniti belghe. Infatti, l'*arsenioardennite* analizzata da Prandtl era di colore bruno di collofonia, come certi termini fortemente vanadiniferi.

(1) Nella prima analisi di Pisani è dato CaO = 4,30%, ma si tratta di un'analisi inesatta, nella quale si ha 1,80%  $V_2O_5$  e niente  $As_2O_5$ .

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di polinomi di Darboux e di Poincaré.* Nota di N. ABRAHESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota testè apparsa in questi Rendiconti <sup>(1)</sup> ho indicato alcuni risultati da me conseguiti in uno studio sistematico delle serie di polinomi nel campo complesso. Chiedo il permesso di completare il riassunto delle mie ricerche riferendomi senz'altro alla Nota precedente per il significato dei simboli e per la numerazione dei §§.

VI. Valendomi del valore assintotico di  $I_n$ , trovo un altro modo di determinare la regione di convergenza delle *serie di Darboux*, servandomi della relazione di ricorrenza fra tre polinomi consecutivi, osservando che queste serie sono un caso particolare delle *serie di Poincaré* <sup>(2)</sup>, dove esiste una relazione tra  $k$  polinomi consecutivi,

$$R_h(x) P_{n+h}(x) - R_{h-1} P_{n+h-1}(x) + \cdots + R_0(x) P_n(x) = 0, \quad \sum a_n P_n(x).$$

Con uno qualunque di questi tre mezzi, ottengo le curve di convergenza per mezzo di una trasformazione conforme <sup>(3)</sup>.

VII. Servandomi dei valori prossimi di  $P_n(x)$  e  $Q_n(x)$ , dimostro che lo sviluppo in serie di polinomi  $P_n(x)$  dell'elemento di Cauchy,  $\frac{1}{x-y}$ , è valevole nell'interno dell'ellissi coi fuochi in 0 ed 1 (oppure  $a$  e  $b$ ) che passa per  $y$ . Arrivo in questo modo a dimostrare che una funzione  $f(x)$ , regolata nell'interno di una corona determinata da due ellissi omofocali, coi fuochi in  $a$  e  $b$ , si sviluppa in serie di polinomi  $P_n(x)$  e funzioni  $Q_n(x)$ ,

$$f(x) = \sum A_n P_n(x) + \sum B_n Q_n(x),$$

$$A_n = -\frac{1}{2\pi i I_n} \int_E f(y) Q_n(y) dy, \quad B_n = -\frac{1}{2\pi i I_n} \int_E f(y) P_n(y) dy.$$

<sup>(1)</sup> Fasc. 3°, 1° sem. 1922, pag. 89.

<sup>(2)</sup> Vedi la Memoria dell'American Journal (vol. VII) già citata nella Nota precedente.

<sup>(3)</sup> Bisogna osservare che il metodo del sig. Faber, di studiare la regione di convergenza delle serie di polinomi per mezzo di una trasformazione conforme, è stata proposta, 45 anni or sono, da Darboux, coll'occasione dello studio del caso particolare nel quale il polinomio  $P_n(x)$  è quello che risulta dalla serie ipergeometrica.

VIII. 1º. Studio infine il caso generale delle serie di Darboux,  $\sum a_n P_{pn}(x)$ , il polinomio <sup>(1)</sup>  $P_{pn}(x)$  essendo da  $p.n$  equazioni lineari

$$\int_{a_{q-1}}^{a_q} \varphi(x) x^s P_{pn}(x) dx = 0, \quad q = 0, 1, \dots, p; \quad s = 0, 1, \dots, n-1.$$

$p$  ed  $a_0 < a_1 < \dots < a_p$  essendo numeri dati, e  $\varphi(x)$  una funzione positiva e integrabile negli intervalli  $(a_0, a_1), \dots, (a_{p-1}, a_p)$ .

2º. I risultati che trovo sono strettamente connessi con l'espressione che ho ottenuto per il polinomio  $P_{pn}(x)$ ,

$$P_{pn}(x) = \frac{1}{n! \varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (x - a_0)^n (x - a_1)^n \dots (x - a_p)^n \psi_n(x) \right].$$

3º. Considerando, come nel caso  $p=1$ , le serie di polinomi  $P_{pn}(x)$  ai quali corrisponde la funzione  $\psi_n(x)$  indipendente da  $n$ , risulta che  $\varphi(x)$  è soluzione comune ad un'infinità di equazioni integrali. In questo caso, come nel caso quando  $\varphi(x) = \psi_n(x)$ , dimostro che il polinomio  $P_{pn}(x)$  è il coefficiente del termine generale di una serie di Lagrange.

4º. Che questo polinomio verifica un'equazione differenziale lineare, di ordine  $(p+1)$ , completamente integrabile.

5º. Trovo il valore prossimo del polinomio  $P_{pn}(x)$ ; infine trovo il dominio di convergenza delle serie generalizzate di Darboux,  $\sum a_n P_{pn}(x)$ .

6º. Nel caso  $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$ ,  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ , ritrovo i polinomi del sig. Appell <sup>(2)</sup>

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[ x^n (1-x^2)^n \right].$$

ai quali trovo una funzione generatrice, un valore prossimo e il dominio di convergenza delle serie  $\sum a_n P_{2n}(x)$ .

<sup>(1)</sup> Vedi certe proprietà di questi polinomi nella Nota del sig Angelescu. *Sur une classe de polynômes à une variable* (Comptes Rendus, t. 162, Janv. 1916).

<sup>(2)</sup> Appell, *Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles* [Archiv der Mathematik und Physik, 1 (1901), pag. 71].

*Matematica. — Sur les surfaces dont toutes les courbes de Darboux sont planes.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Correspondente GUIDO FUBINI.

Les coordonnées tangentielles homogènes  $z$ , d'une surface quelconque, rapportée aux lignes asymptotiques, satisfont, si l'on choisit convenablement le facteur de proportionnalité, aux équations <sup>(1)</sup>

$$(1) \quad z_{uu} = 2bz_v + cz, \quad z_{vv} = 2a'z_u + dz.$$

L'expression

$P = [-12a'^2 b\tau^2 + (a'_v b - a' b_v)\tau + a'_u b - a' b_u]z - 6a'b(z_u - \tau z_v)$ , où  $a'\tau^2 + b = 0$ , représente <sup>(2)</sup> le plan osculateur d'une ligne de Darboux (à osculation quadrique) de la surface. On déduit, en faisant usage des conditions d'intégrabilité du système (1), l'identité

$$\begin{aligned} & P(P_u + \tau P_v) - P\left(\frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v}\right) \log a'^5 b^7 = \\ & = a'b_z \left\{ \left[ 6 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log \frac{a'}{b} - \left( \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{a'}{b} \right)^2 - 36 \left( a'_u + \frac{a'}{b} b_u - d \right) \right] \tau^2 + \right. \\ & \left. + 12 \tau \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{a'}{b} + 6 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \frac{a'}{b} + \left( \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{a'}{b} \right)^2 + 36 \left( b_v + \frac{a'}{b} a'_v - c \right) \right\}. \end{aligned}$$

Pour les surfaces en question, le second membre s'évanouit identiquement en  $\tau$ . On peut donc faire <sup>(3)</sup>, dans ce cas,

$$a' = b = \varphi, \quad c = 2\varphi_v, \quad d = 2\varphi_u,$$

ainsi que les équations (1) sont

$$(2) \quad z_{uu} = 2(\varphi z_v + \varphi_v z), \quad z_{vv} = 2(\varphi z_u + \varphi_u z),$$

où  $\varphi$  satisfait les conditions d'intégrabilité

$$(3) \quad \varphi_{uu} = 2\varphi\varphi_v, \quad \varphi_{vv} = 2\varphi\varphi_u.$$

Je vais montrer qu'on peut intégrer (2), mais, pour brièveté, j'écarte les cas aisés où  $\varphi$  est fonction d'une seule des quantités

$$(4) \quad x_i = \varepsilon^{i_1} u + \varepsilon^{i_2} v \quad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}, \quad i = 0, 1, 2).$$

<sup>(1)</sup> Les indices  $u, v$  signifient partout les dérivées partielles.

<sup>(2)</sup> En ce sens que les coordonnées de ce plan s'obtiennent en remplaçant  $z$  par les coordonnées du plan tangent de la surface.

<sup>(3)</sup> Si l'on a  $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{a'}{b} \right) = 0$  (surfaces isothermo-asymptotiques de M. Fubini), on peut faire  $a' = b$  par un changement des paramètres  $u, v$ .

Tout d'abord remarquons que

$$(5) \quad f(x_i) = \varepsilon^i \varphi_u + \varepsilon^{2i} \varphi_v + \varphi^2$$

est, en vertu de (3), une fonction de  $x_i$  seul et satisfait à l'équation

$$(6) \quad f'''(x_i) = 4f(x_i) f'(x_i).$$

Ceci étant, on peut, dans le cas actuel, représenter le plan osculateur d'une ligne de Darboux par l'expression

$$(7) \quad Q_i = \varepsilon^{2i} z_u + \varepsilon^i z_v - 2\varphi z,$$

qui vérifie, d'après (2), l'équation différentielle

$$(8) \quad \frac{d^3 Q_i}{dx_i^3} = 4 \frac{d}{dx_i} [f(x_i) Q_i].$$

Grâce à (6), on remonte de l'équation (8) à la suivante

$$(9) \quad \frac{Q_i}{f'(x_i)} + a \int \frac{f(x_i) dx_i}{[f'(x_i)]^2} + b \int \frac{dx_i}{[f'(x_i)]^2} = c_i,$$

$a, b, c_0, c_1, c_2$  étant des constantes, dont les deux premières ne dépendent pas de l'indice  $i$ , car on trouve

$$(10) \quad a = (\varphi_{uv} - 4\varphi^3) z - \varphi_v z_u - \varphi_u z_v + \varphi z_{uv},$$

$$(11) \quad b = \varphi (2\varphi_u \varphi_v - 3\varphi \varphi_{uv} + 4\varphi^4) z + (\varphi^2 \varphi_v - \varphi_u^2) z_u + \\ + (\varphi^2 \varphi_u - \varphi_v^2) z_v + (\frac{1}{2} \varphi_{uv} - \varphi^3) z_{uv}.$$

Pour trouver la relation qui passe nécessairement entre les constantes  $a, b, c_i$ , on commence par éliminer  $z$  des équations (7), (10), (11), ce qui donne

$$(12) \quad \Theta_0 Q_0 + \Theta_1 Q_1 + \Theta_2 Q_2 = 3\varphi (\varphi_{uv} - 2\varphi^3) a - 6\varphi^2 b,$$

où j'ai posé

$$\Theta_i = 2\varphi \varphi_u \varphi_v - \frac{1}{2} \varphi_{uv}^2 + \varepsilon^i \varphi (\varphi_u \varphi_{uv} - 2\varphi \varphi_v^2) + \varepsilon^{2i} \varphi (\varphi_v \varphi_{uv} - 2\varphi \varphi_u^2).$$

Or l'identité

$$f'(x_i) = \varphi_{uv} + 2\varepsilon^i \varphi \varphi_u + 2\varepsilon^{2i} \varphi \varphi_v$$

donne par multiplication

$$(13) \quad \Theta_i f'(x_i) = 6\varphi^2 \varphi_u \varphi_v \varphi_{uv} - \frac{1}{2} \varphi_{uv}^3 - 4\varphi^3 (\varphi_u^2 + \varphi_v^2) \equiv \Theta,$$

où  $\Theta$  ne contient plus l'indice  $i$ . Si l'on introduit encore les valeurs des  $Q_i$  tirées de l'équation (9), l'identité (12) donne

$$\left[ \sum_{i=0}^2 \int \frac{f(x_i) dx_i}{[f'(x_i)]^2} - \frac{3\varphi (2\varphi^3 - \varphi_{uv})}{\Theta} \right] a + \\ + \left[ \sum_{i=0}^2 \int \frac{dx_i}{[f'(x_i)]^2} - \frac{6\varphi^2}{\Theta} \right] b = c_0 + c_1 + c_2.$$

Les deux constantes  $a$  et  $b$  étant manifestement indépendantes, les deux quantités entre crochets sont des constantes et l'on a simplement, en dispo-

sant convenablement des limites inférieures des intégrales,

$$(14) \quad \sum_{i=0}^2 \int \frac{f(x_i) dx_i}{[f'(x_i)]^2} = \frac{3\varphi(2\varphi^3 - \varphi_{uv})}{\Theta} \quad \sum_{i=0}^2 \int \frac{dx_i}{[f'(x_i)]^2} = \frac{6\varphi^2}{\Theta},$$

$$(15) \quad c_0 + c_1 + c_2 = 0.$$

L'identité

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 = -6\varphi z$$

donne maintenant les solutions du système (2). Mais c'est l'interprétation géométrique du procédé employé qui donne des résultats intéressants. Tout d'abord, l'équation (8) étant du troisième ordre seulement, les plans des lignes de Darboux de chaque famille enveloppent un cône <sup>(1)</sup>. On voit aussi que ces trois cônes sont homographiques, si nous faisons correspondre les plans tangents appartenant à une même valeur du paramètre qui est, respectivement,  $x_0, x_1, x_2$ . D'autre part, si l'on pose la relation trilinéaire

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0,$$

les trois cônes engendrent, par les intersections des plans tangents, la surface cherchée. Passons au fait que  $a$  et  $b$  ne dépendent pas de  $i$ . Ceci donne, en premier lieu, que les sommets des trois cônes sont situés en ligne droite, tout les plans contenant celle-ci étant de plus unis dans les homographies qui ont lieu entre les cônes. Ces homographies sont donc des simples perspectivités, et les plans de perspectivité forment d'ailleurs nécessairement un faisceau. Enfin, d'après (15), entre les sommets des cônes et ces plans passe la bien connue relation d'une forme cubique binaire et son covariant cubique <sup>(2)</sup>.

Essentiellement, trois cas sont possibles

$$-\varphi = \zeta x_0 + \zeta x_1 + \zeta x_2,$$

(cas général), ou

$$-\varphi = \cot x_0 + \cot x_1 + \cot x_2, \quad -\varphi = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Dans le cas général, on voit que l'on a

$$f(x_i) = 3p x_i, \quad \varphi^2 = p x_0 + p x_1 + p x_2,$$

$$\Theta = -\frac{27}{2} p' x_0 p' x_1 p' x_2, \quad \varphi(2\varphi^3 - \varphi_{uv}) = p x_0 p x_1 + p x_0 p x_2 + p x_1 p x_2 + \frac{3}{4} g_2.$$

On peut donc, dans les équations (14), choisir zéro comme limite inférieure des intégrales.

<sup>(1)</sup> Si  $\varphi$  est fonction de  $x_i$  seul, les plans des courbes de Darboux  $x_i = \text{constante}$  forment un faisceau. Ces courbes sont des simples coniques et les courbes conjuguées sont planes.

<sup>(2)</sup> Ces plans coupent la surface en courbe de Segre particulières

$$x_0 - x_1 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_0 = 0.$$

Fisica. — *Sulla dispersione della luce nelle soluzioni fluorescenti.* Nota del dott. ANTONIO CARRELLI, presentata dal Socio M. CANTONE.

Mi sono posto il seguente problema: con sostanze fluorescenti che presentano un cospicuo assorbimento ed un'intensa fluorescenza, esistono due tipi distinti di vibratori e quindi due corrispondenti anomalie dell'indice di rifrazione, una relativa alla zona di emissione l'altra a quella di assorbimento?

La ricerca sperimentale con lo spettrometro dette un risultato negativo, in quanto che nello illuminare la soluzione, che riempiva il prisma cavo, non si notò alcun sensibile spostamento della riga di lunghezza d'onda 5893 Å centrata nel cannocchiale nella posizione della deviazione minima. Nè più fortunati furono i tentativi fatti con il refrattometro interferenziale di Jamin, quando, prodotte le frange monocromatiche relative a  $\lambda = 5893$ , veniva illuminata una delle due vaschette piene della soluzione in esame: adunque, per la luce impiegata, la presenza di oscillatori emittenti in una delle due vaschette, non produceva un'alterazione sensibile nel cammino ottico (¹).

Si pensò, infine, di attuare un altro metodo sintetico, che desse rapidamente modo di analizzare il fenomeno in un esteso campo di frequenze e non più per una frequenza unica.

Si adoperò allo scopo il refrattometro di Jamin, analizzando spettroscopicamente le frange iridescenti ottenute con una sorgente molto intensa. Nelle due parti della vaschetta si pose acqua e soluzione acquosa fluorescente scegliendo quelle con grossa banda di emissione, onde si prestaron molto bene alcune sostanze del gruppo del trifenilmelano e precisamente le seguenti: eosina, eritrosina, rodamina B, rodamina G 6, uranina.

In queste soluzioni poste in uno dei due scompartimenti della vaschetta la fluorescenza veniva eccitata dallo stesso fascio luminoso che produceva le frange. Disposta in tal modo l'esperienza, si poté osservare che effettivamente esisteva l'effetto ricercato; le frange cioè apparivano distorte per la presenza dell'assorbimento con l'andamento caratteristico della dispersione anomala; ma anche nella zona corrispondente alla emissione si notava una visibile anomalia: le frange presentavano infatti un doppio flesso, però quello relativo alla emissione era molto meno marcato.

(¹) Queste esperienze furono condotte con soluzioni di solfato di uranio.

Per procedere alle misure si usò il seguente metodo: si fissava mediante i due fili del reticolo del cannocchiale annesso allo spettroscopio la posizione intermedia di due frange nell'estremo rosso visibile e si notava la lunghezza d'onda relativa; si spostava quindi mediante vite micrometrica il cannocchiale riportando il reticolo nella stessa posizione, ma relativamente alla frangia successiva, notando ancora la corrispondente lunghezza d'onda. Così si procedeva per tutto lo spettro: riportando questi valori di  $\lambda$  in ascisse con valori delle ordinate corrispondenti crescenti come 1, 2, 3... si poteva ricostruire l'andamento della frangia da quello della curva così tracciata. I risultati sono riassunti nella fig. 1: le prime due curve si rife-

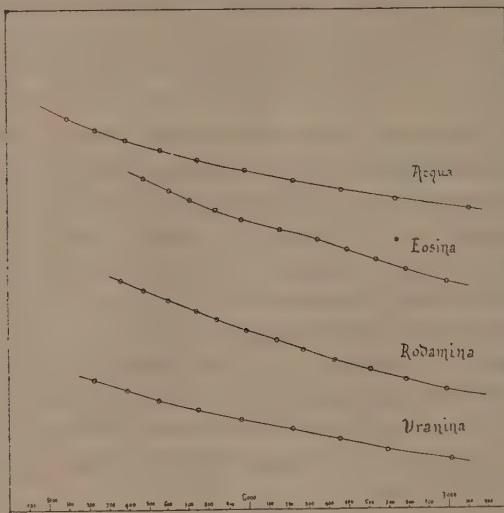


FIG. 1.

riscono all'eosina; e, come vedesi, si ha un andamento curvilineo prima della scomparsa delle frange, verso 5300, per l'azione assorbente. Con una soluzione meno concentrata (curva  $\beta$ ) si è potuto seguire il fenomeno anche attraverso la zona assorbita, per potere così porre chiaramente in vista il doppio flesso.

Analizzando il fenomeno con soluzioni fluorescenti diverse, si è potuto sempre riscontrare la presenza di questo andamento anomalo nella zona corrispondente alla emissione, ma con modalità che variano da sostanza a sostanza, e ciò certamente in relazione alla diversa legge di distribuzione dell'energia delle radiazioni emesse per fluorescenza; in altri termini, in relazione al diverso spettro di fluorescenza.

Il comportamento dell'uranina è interessante poiché in essa la zona di emissione si trova più vicina alla zona di assorbimento che non per l'eosina, quindi l'effetto suddetto si può meglio apprezzare.

Nella rodamina B e nella rodamina G 6 il secondo flesso è esteso invece su più larga zona e verso le grandi lunghezze d'onda.

Anche nell'eritrosina l'effetto è nettamente apprezzabile. Le concentrazioni che ho adoperate, per trovarmi nelle condizioni più opportune, si mantengono sempre nello stesso ordine di grandezza (da circa  $10^{-5}$  a  $10^{-6}$ ).

Infine per accettare in modo assoluto l'effetto ho pensato di studiare il fenomeno con una nuova disposizione sperimentale: le due vaschette erano riempite, non più una con soluzione e l'altra con acqua, ma entrambe con soluzione fluorescente; però uno dei due scompartimenti era protetto lateral-

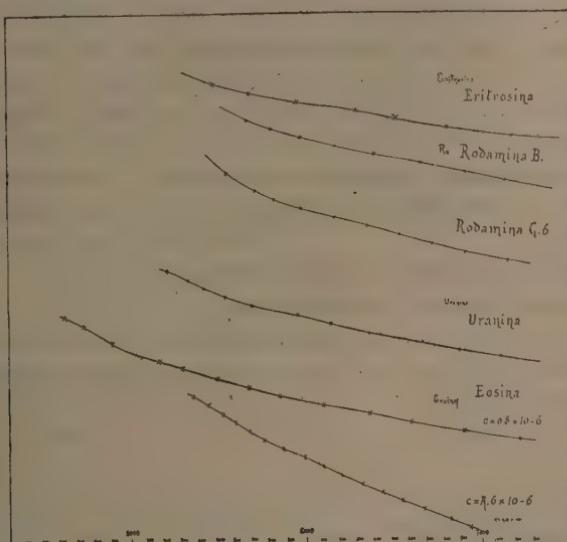


FIG. 2.

mente da schermi, in modo che la luce che l'attraversava proveniva soltanto da quella della sorgente riflessa dal primo specchio; l'altro scompartimento era invece intensamente illuminato con specchi opportunamente disposti. I due scompartimenti si differenziavano quindi per una grande diversità nell'intensità della fluorescenza; e se una differenza di cammino ottico veniva a prodursi per questo fatto, bisognava notare una distorsione delle frange, che in caso contrario si sarebbero mostrate regolari, in relazione all'andamento caratteristico di due percorsi otticamente equivalenti. I risultati sono riassunti nella fig. 2: le curve ottenute col medesimo metodo di prima mostrano nelle rispettive zone di emissione una sensibile anomalia. È da notare che le lunghezze d'onda relative alle zone di maggiore anomalia non portano a valori di  $\lambda_m$  coincidenti con quelli ottenuti da altri sperimentatori con ricerche spettrofoto-

metriche<sup>(1)</sup>). Questo disaccordo può avere la sua origine dal fatto che per tutte le sostanze studiate lo spettro di emissione non si estende simmetricamente rispetto al massimo ed inoltre invade anche la zona di assorbimento. Ciò produce un disturbo nella distribuzione della velocità di propagazione poichè non è presente una sola frequenza caratteristica ma tutto un campo di tali frequenze e quando un fascio polieromatico attraversa la sostanza, tutte queste entrano in gioco ma con intensità, dipendente sia dalla relativa intensità di emissione, sia dalla facilità di vibrazione per risuonanza; per cui gli effetti finali che si osservano con lo studio della dispersione sono risultanti dal complesso dei disturbi che entrano in gioco.

Per ciò che si riferisce all'influenza termica dipendente dall'azione della sorgente in uno dei due scompartimenti, devo dire che se ne tenne conto compensando i piccoli spostamenti delle frange, e che in ogni modo la dissimetria non era di natura tale da produrre una distorsione.

Concludendo:

- a) nelle sostanze fluorescenti la presenza di vibratori emittenti modifica la curva di dispersione in modo analogo all'azione esercitata dai vibratori assorbenti;
- b) le varie sostanze studiate si differenziano tra di loro riguardo a questo effetto per intensità e distribuzione;
- c) il flesso di emissione è meno accentuato di quello di assorbimento.

Rendo vive grazie al prof. Cantone per i consigli datimi ed i mezzi posti a mia disposizione.

*Fisica terrestre. — Risultati di misure attinometriche eseguite a Catania.* Nota II del prof. GIOVANNI TROVATO, presentata dal Corrispondente BEMPORAD.

Per studiare la variazione del coefficiente di assorbimento colla inclinazione dei raggi, ho calcolato dapprima i valori di  $q$  corrispondenti alle distanze zenitali  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $70^\circ$ , sia per le osservazioni fatte al mattino, sia per quelle fatte al pomeriggio. Per facilitare i confronti ho raggruppato in medie i diversi valori, limitatamente agli intervalli 22-31 agosto mattina e 20-31 agosto pomeriggio. Indicando con  $z$  le distanze zenitali, ho così ottenuto:

| MATTINO         |              |            |            |            | POMERIGGIO      |              |            |            |            |
|-----------------|--------------|------------|------------|------------|-----------------|--------------|------------|------------|------------|
| $z \dots \dots$ | $30^\circ$   | $40^\circ$ | $60^\circ$ | $70^\circ$ | $z \dots \dots$ | $30^\circ$   | $40^\circ$ | $60^\circ$ | $70^\circ$ |
| Plaia . .       | $q = 11,93$  | 11,27      | 8,03       | 4,97       | Plaia . .       | $q = 11,93$  | 11,33      | 8,69       | 6,01       |
| Osservat.       | $q' = 12,61$ | 11,74      | 9,02       | 6,45       | Osservat.       | $q' = 13,41$ | 13,11      | 11,67      | 9,77       |

(<sup>1</sup>) Nicols and Merritt, Annate della Phys. Rev. dal 1906 al 1914.

Ho calcolato, infine, i valori del coefficiente di assorbimento  $c$  mediante la formula :

$$c = \frac{\log q' - \log q}{m}$$

ove  $q'$  e  $q$  sono i precedenti valori medi della intensità della radiazione solare rispettivamente all'Osservatorio ed alla Plaia per le diverse distanze zenithali ed  $m$  sono le rispettive masse di aria attraversate dai raggi.

Come valori medi del coefficiente di assorbimento ho così ottenuto :

| MATTINO   |     |     |     | POMERIGGIO |     |     |     |
|-----------|-----|-----|-----|------------|-----|-----|-----|
| 30°       | 40° | 50° | 70° | 30°        | 40° | 50° | 70° |
| $c = 2,7$ | 1,8 | 3,3 | 5,1 | $c = 5,7$  | 6,4 | 8,3 | 9,5 |

Si riconosce dunque :

1) Che tanto nelle osservazioni fatte al mattino quanto in quelle fatte al pomeriggio, lo strato di aria di soli 62 metri, compreso fra la Plaia ed il R. Osservatorio di Catania, esercita un forte assorbimento sulla radiazione calorifica solare.

2) Che i valori del coefficiente di assorbimento corrispondenti alle osservazioni fatte al pomeriggio sono circa il doppio di quelli corrispondenti alle osservazioni del mattino.

3) Che il coefficiente di assorbimento aumenta coll'aumentare la distanza zenitale dei raggi.

Determinando i valori medi dell'umidità per la mattina e il pomeriggio, si ottiene :

| MATTINO                |                     | POMERIGGIO             |                     |                     |    |
|------------------------|---------------------|------------------------|---------------------|---------------------|----|
| Tensione<br>del vapore | Umidità<br>relativa | Tensione<br>del vapore | Umidità<br>relativa |                     |    |
| Plaia . . .            | 15, <sup>mm</sup> 0 | 56                     | Plaia . . .         | 16, <sup>mm</sup> 3 | 62 |
| Osservatorio           | 12,8                | 42                     | Osservatorio        | 14,5                | 48 |

La diminuzione di trasparenza dell'aria dal mattino al pomeriggio si può dunque spiegare come dovuta all'aumento di umidità prodotta dall'evaporazione dell'acqua del mare ed al forte potere assorbente del vapor d'acqua per le radiazioni calorifiche.

La conclusione poi che il coefficiente di assorbimento aumenta coll'aumentare la distanza zenitale dei raggi, costituisce un risultato diametralmente opposto a quello trovato dal Prof. A. Bemporad per le regioni elevate e che si attribuisce al fenomeno dell'assorbimento selettivo della radiazione solare nell'atmosfera terrestre, come ho in principio detto. Ne concludiamo adunque che nello strato più basso dell'atmosfera i fenomeni dell'assorbimento selettivo appaiono completamente invertiti per la presenza antagoni-

stica di altri fattori, nei quali ha certo gran parte la distribuzione del vapore d'acqua e del pulviscolo.

Mi è grato di esternare i più vivi ringraziamenti al Prof. A. Bemporad, direttore del R. Osservatorio di Capodimonte (Napoli), ed al Professor Giovanni Platania per gli affettuosi consigli dei quali mi sono stati larghi nel presente lavoro.

**Chimica. — Sulla solubilità allo stato solido del bismuto e del cadmio nel piombo.** Nota di CLARA DI CAPUA, presentata dal Corrisp. N. PARRAVANO.

Come è noto, il metodo di ricerca che va col nome di analisi termica non consente, nella maniera in cui viene ordinariamente adoperato, una misura rigorosa dei tempi di arresto. Esso permette perciò solo conclusioni approssimate nei riguardi dei punti caratteristici di un diagramma di stato: composizione degli eutettici, dei composti, dei cristalli misti saturi, ecc.

Un metodo preciso è quello impiegato da Mazzotto per un certo numero di coppie di leghe facilmente fusibili già in una epoca in cui mancavano ancora le basi teoriche per la conoscenza della intima struttura delle leghe<sup>(1)</sup>.

Mazzotto ha calcolato dalle velocità di raffreddamento e riscaldamento delle leghe, le quantità di calore che vengono svolte e rispettivamente assorbite da 1 Kg. di lega durante il compiersi delle variazioni di stato. Rappresentando graficamente queste quantità di calore in funzione della temperatura, egli ottenne delle curve che hanno lo stesso aspetto delle ordinarie curve temperatura-tempo (curve di riscaldamento e raffreddamento). Anche nelle curve del Mazzotto, come in queste, l'inizio della cristallizzazione si avverte con un gomito, la solidificazione eutettica con un tratto orizzontale: questo tratto orizzontale è proporzionale alla quantità di eutettico esistente nella lega e si può utilizzare per costruire i diagrammi.

Il metodo del Mazzotto è lungo a eseguirsi e in alcuni casi, che indicherò in seguito, per le condizioni sperimentali in cui si opera, dà risultati meno vicini al vero che gli altri metodi.

Fra questi più semplice e di manualità più facile è il metodo adoperato da Plato<sup>(2)</sup> per la misura dei calori di fusione di alcuni sali e per la costruzione dei diagrammi di fusione esatti di alcune coppie saline. Esso consiste nel regolare la velocità di raffreddamento del forno in modo che le temperature che questo va successivamente assumendo vengano a trovarsi sopra una linea retta: ciò si ottiene diminuendo lentamente e regolarmente

(1) Memorie dell'Istituto Lombardo [3] 7, 1 (1891).

(2) Zeit. Phys. Ch., 55, 721 (1906); 58, 350 (1907).

l'apporto di calore al forno, a mezzo di una resistenza mobile sussidiaria, in un circuito di cui è parte la spirale che riscalda il forno stesso.

Le curve, che con tale metodo si ottengono, permettono:

1° di calcolare i tempi di arresto riferiti all'unità di massa di sostanza che solidifica;

2° di calcolare i tempi di arresto riferiti all'unità di massa di sostanza per una velocità di raffreddamento uguale in tutti i casi a 1;

3° di calcolare i calori di fusione delle sostanze dal confronto dei risultati ottenuti con corpi a calore di fusione noto.

È possibile, secondo Plato, arrivare a calcolare pure i calori specifici; ai nostri scopi però questi non hanno interesse.

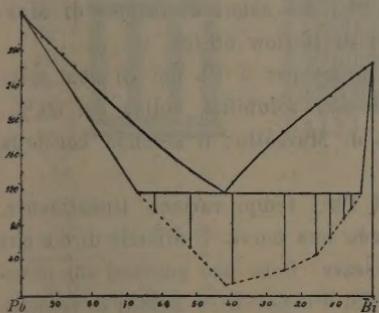


FIG. 1.

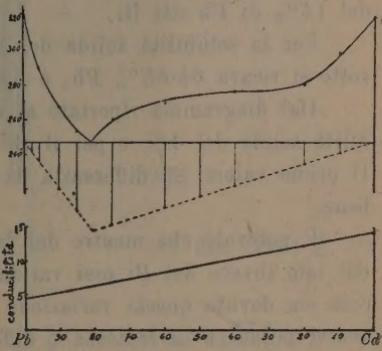


FIG. 2.

Il metodo di Plato non ha avuto fino ad ora alcuna altra applicazione oltre quelle fattene dall'autore stesso. Mi è sembrato pertanto opportuno applicarlo allo studio di leghe metalliche per descriverne diagrammi esatti.

I risultati ottenuti per le coppie Pb-Bi e Pb-Cd sono riportati nei due diagrammi (fig. 1 e 2).

I tempi di arresto riportati sui diagrammi si riferiscono alla massa 1 e alla velocità 1. Essi sono stati ricavati nella stessa maniera indicata da Plato per i corpi puri. È facile infatti dimostrare che anche per gli eutettici sono applicabili le costruzioni e le formule di Plato.

Le leghe di Pb-Bi sono state studiate da un gran numero d'autori<sup>(1)</sup>. Il diagramma adottato per esse e riportato anche nelle tabelle del Landolt è quello di Stoffel<sup>(2)</sup>. Secondo esso, l'eutettico contiene circa il 42 % di Pb e i limiti di solubilità allo stato solido di Bi in Pb e di Pb in Bi sono a circa il 10 % in entrambi i casi.

Questi valori sono certamente inesatti.

<sup>(1)</sup> Mazzotto (loc. cit.); Heacock e Neville, J. Chem. Soc., 61, 904 (1892); Charpy, Contribution à l'étude des alliages, Paris, 1901, p. 220; Shepherd, Chemisches Centralblatt, 1903, I, 223 e 435; Barlow, Zeit. anorg. Chemie, 70, 183 (1911).

<sup>(2)</sup> Zeit. anorg. Ch., 53, 150 (1907).

Estrapolando i valori di Mazzotto dalla parte del Bi si arriva alla conclusione che al massimo l'1% di Pb si può sciogliere nel Bi alla temperatura eutettica; ma neanche questo risultato può essere accettato.

E infatti basta pensare al modo di operare di Mazzotto (egli portava le leghe a fusione e poi immergeva crogiuolo con lega in un ambiente raffreddato a 0°) per dedurne che egli si trovava in presenza di velocità di raffreddamento eccessivamente forti le quali possono non permettere ai cristalli misti di omogeneizzarsi come richiederebbe la teoria, per modo che arrivano a cristallizzare in corrispondenza dell'eutettico anche leghe che dovrebbero essere costituite solo da cristalli misti omogenei.

E ciò è evidente perché dai risultati di Barlow si arriva ad un tenore del 14% di Pb nel Bi.

Per la solubilità solida del Bi nel Pb, dai calori di fusione di Mazzotto si ricava 64-65% Pb, e dai valori di Barlow 68-69.

Dal diagramma riportato si ricava invece per il Pb nel Bi una solubilità solida del 4% e per il Bi nel Pb una solubilità solida del 34%. Il primo valore si differenzia da quello di Mazzotto; il secondo concorda bene.

È notevole che mentre dal lato del Pb i tempi variano linearmente, dal lato invece del Bi essi variano secondo una curva. È difficile dire a che cosa sia dovuta questa variazione non lineare: forse può pensarsi che possa avervi influenza la lentezza di diffusione del Pb nel Bi e quindi la velocità di raffreddamento. Con un raffreddamento molto più lento, in questo caso, anche dal lato del Bi i tempi di arresto dovrebbero presentare una variazione lineare.

Ad ogni modo la concordanza con i valori di Mazzotto è sufficiente: identità come si è visto non poteva aspettarsi data la differenza notevolissima nelle velocità di raffreddamento.

Le velocità con cui ho lavorato nel caso delle leghe Pb-Bi oscillavano di poco intorno a 1°,4 al minuto.

I risultati ottenuti per le leghe di Pb-Cd sono riassunti nel diagramma della fig. 2.

Come si vede, in questo caso non esiste quasi affatto solubilità solida del Pb nel Cd e viceversa. Questa conclusione non concorda con quanto finora si riteneva in proposito, giacchè il diagramma che si accettava per queste leghe e che è riportato nelle tabelle di Landolt, ammette una solubilità del 4% circa di Cd nel Pb.

Le mie conclusioni sono state convalidate anche dalla misura delle conducibilità specifiche. Queste variano linearmente dalla conducibilità del piombo a quella del cadmio, ed il diagramma relativo (fig. 2) esclude perciò senz'altro l'esistenza di solubilità solida.